

Control 3

Miércoles 5 de Noviembre, 2003

Problema 1

1. Sea el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -8X_1 - X_2 \\ \text{s.a.} & \\ & -X_1 + 4X_2 \geq 4 \\ & 2X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ & X_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) (0,5 ptos.) Grafique y obtenga el óptimo.
 b) (1,5 ptos.) Formule el dual y obtenga el óptimo en forma analítica (no use SIMPLEX ni grafique).
2. Dado el problema primal

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & z = cx \\ \text{s.a.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- a) (2,0 ptos.) Demuestre que si el problema primal es no acotado entonces el dual debe ser infactible.
 b) (2,0 ptos.) Puede pasar que ambos problemas (primal - dual) sean infactibles? Justifique.

Problema 2

Considere el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ \text{s.a.} & \\ & \frac{5}{17}X_1 - \frac{14}{17}X_2 - \frac{1}{17}X_3 \leq \frac{35}{17} \\ & \frac{2}{17}X_1 + \frac{8}{17}X_2 + \frac{3}{17}X_3 \leq \frac{31}{17} \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{array}$$

Este problema se ha resuelto como minimización y su forma canónica óptima es la siguiente

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = 47 - 2X_2 - 6X_4 - 19X_5 \\ \text{s.a.} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & - & 2X_2 & & & + & 3X_4 & + & X_5 & = & 8 \\ & & + & 4X_2 & + & X_3 & - & 2X_4 & + & 5X_5 & = & 5 \end{array}$$

Además se sabe que la matriz básica en el óptimo es tal que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Con estos antecedentes responda las siguientes preguntas:

1. (3,0 ptos.) Suponga que $c_1 = 4$ cambia a $c'_1 = 3$. Analice si cambia o no la solución óptima del problema. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima.
Determine además si cambia o no el vector de precios sombra (π). En caso afirmativo encuentre sus nuevos valores.
2. (3,0 ptos.) Suponga que $b_1 = \frac{35}{17}$ se cambia a $b'_1 = 1$. Analice si cambia o no la solución óptima. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima.
Determine además el rango de variación de b_1 para que los precios sombra se mantengan.

Problema 3

Una empresa forestal del sur de Chile debe elaborar su plan de producción de mediano plazo por lo que le ha decidido contratar a la consultora Catalan & Mandinga s.a. Los datos entregados a la consultora son los siguientes:

El horizonte de planificación considera T años y las decisiones de producción deben ser presentadas en formato de planes de producción anuales. La empresa cuenta con N Bosques y cada bosque esta dividido en predios. Considere que en el predio i existen A_i árboles y que el conjunto P_n contiene a los predios que pertenecen al bosque n .

Las posibles estrategias de producción deben considerar el crecimiento y reforestación de los predios talados. Si un predio cuenta con una altura media (de los árboles) de X mts. al comienzo de un año, al comienzo del próximo la altura media será $(X \cdot 1,2 + 5)$ mts. De esta forma si un predio es talado durante un período, al comienzo del próximo año su altura media será 5 mts. Considere que la altura media del predio i al comienzo del año 1 es H_i .

La producción de maderá ya ha sido comprometida por lo que el año t cuenta con una demanda de D_t mts³ de madera (considere que el tronco del árbol promedio tiene un diámetro de d mts.).

El plan de producción debe considerar que si se decide talar un predio en un período en particular la totalidad de sus árboles deben ser talados.

En otro plano operacional el acceso al predio i requiere la construcción de un conjunto C_i tramos de camino, por donde se transportará la madera, siendo C el conjunto total de tramos caminos, con $C_i \subset C$.

El costo de talar un árbol del bosque n durante el período t es T_n^t . El costo de construir el camino j en el período t es M_j^t . Además existe un costo fijo de operación F_n en el bosque n , es decir, si en un período se decide talar algún predio del bosque n , se debe pagar un monto F_n .

Por restricciones de adyacencia, en caso de efectuarse operaciones en el predio i , no se podrán realizar operaciones en los predios vecinos. El conjunto de predios vecinos al predio i esta dado por V_i .

Por motivo de la legislación ambiental vigente un predio no puede ser talado si su altura media es inferior a L mts. Además no se puede permitir que la altura media de algún predio este más de W años sin ser talado.

Construya un modelo de programación lineal mixta que ayude a los contratistas a decidir que predios deben ser talados cada año, y que caminos deben ser construidos cada año, de manera de minimizar los costos de operación.